

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Uno dei requisiti più importanti per un sistema di antenne è il Guadagno.

Per avere un guadagno elevato mi serve una antenna grande (G è proporzionale all'Area efficace) o, equivalentemente, una distribuzione di corrente in uno spazio grande, ossia un allineamento di antenne.

Gli allineamenti sono antenne composite, formate da elementi tutti uguali tra loro, elementi che sono caratterizzati generalmente da bassa direttività.

Associando opportunamente tali elementi in array, si ottiene una direttività notevolmente superiore a quella dei singoli elementi costituenti l'allineamento.

Di solito gli elementi che costituiscono un array sono disposti su un piano (array planari) o su una linea (array lineari) e possono essere di natura diversa (antenne a mezz'onda, microstrip, ecc.).

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Sotto l'aspetto funzionale, gli array possono essere sostanzialmente divisi in tre gruppi:

- array broadside: elementi alimentati tutti in fase tra loro, e direzione di massimo perpendicolare al piano dell'allineamento.
- array endfire: elementi disposti lungo un allineamento ed alimentati con uno sfasamento tale da avere un massimo di irradiazione nella direzione dell'allineamento stesso.
- array a fase generica: elementi alimentati con sfasamenti variabili che possono essere regolati per ottenere un particolare tipo di fascio.

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Il campo lontano di un insieme di N antenne può essere espresso (purchè ci si trovi in zona di Fraunhofer dell'intero allineamento) come

$$\underline{E} = j \frac{\zeta}{2\lambda} \sum_n \frac{I_n \underline{h}_n}{|\underline{r} - \underline{r}_n|} e^{-j\beta|\underline{r} - \underline{r}_n|} \rightarrow \underline{E} = j \frac{\zeta}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sum_n I_n \underline{h}_n e^{j\beta \underline{r}_n \cdot \underline{i}_r} \quad (1)$$

dove \underline{r}_n , \underline{h}_n , I_n sono posizioni, altezza efficace e corrente di alimentazione della n-esima antenna e, se sono in zona di Fraunhofer dell'allineamento, posso porre $|\underline{r} - \underline{r}_n| \cong r$ a denominatore e $|\underline{r} - \underline{r}_n| \cong r - \underline{i}_r \cdot \underline{r}_n$ per il fattore di fase.

Se le antenne di questo insieme sono alimentate in modo coerente, ovvero se le N correnti I_n derivano tutte dalla stessa sorgente, si parla di allineamento (o schiera o array) e il campo lontano dipende in maniera essenziale dalla interferenza dei campi delle singole antenne.

Array di Antenne

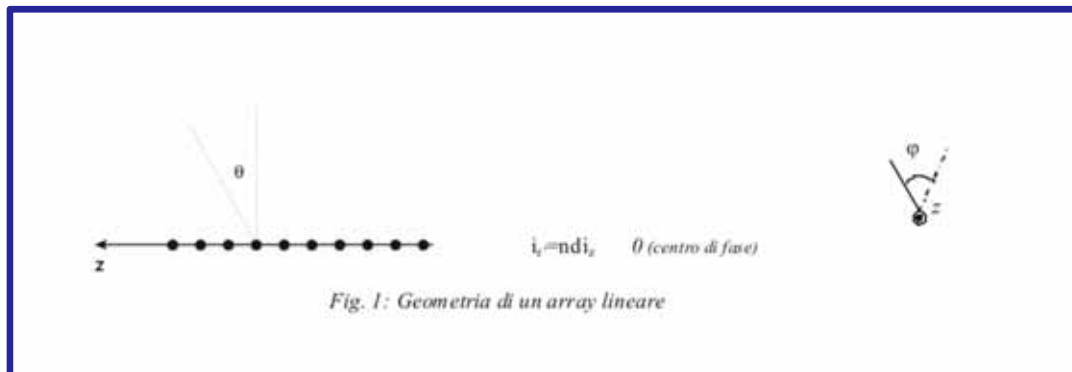
Il Fattore di Array

Se le antenne sono uguali, equiallineate e disposte con spaziatura d costante lungo l'asse z , allora $\underline{r}_n = nd\underline{i}_z$.

Se possiamo considerare le antenne monomodali (la forma della corrente sull'antenna non dipende dalla presenza di altre antenne, ma ne dipende solo la sua ampiezza), allora anche l'altezza efficace sarà la stessa per ogni antenna: $\underline{h}_n = \underline{h} \quad \forall n$ e, posto $I_n = a_n I_0$ (con a_n eccitazione relativa) si ha:

$$\underline{E} = j \frac{\zeta_0 \underline{h}}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \sum_n a_n e^{jn\beta d \sin \vartheta} \quad (2)$$

dove, dalla Fig.1, si ha che $\underline{i}_r \cdot \underline{r}_n = \underline{i}_r \cdot nd\underline{i}_z = nd \sin \vartheta$



Array di Antenne

Il Fattore di Array

Il termine

$$F(\vartheta) = \sum_n a_n e^{jn\beta d \sin \vartheta} \quad (3)$$

viene detto fattore di array ed è il principale responsabile delle proprietà direzionali e di radiazione dell'allineamento medesimo.

L'angolo θ è l'angolo formato dalla direzione di irradiazione con il piano ortogonale all'asse z , che è anche l'asse dell'allineamento.

Si noti che di solito si sceglie il centro di fase dell'allineamento in corrispondenza del centro fisico dell'allineamento.

L'altezza efficace delle antenne monomodali (uguale per tutte) h influisce sul campo irradiato in quanto i suoi zeri sono anche zeri di irradiazione, ed inoltre la sua ampiezza modifica l'ampiezza del campo irradiato.

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Comunque tale h varia molto poco con gli angoli θ e φ , mentre al contrario il fattore di array varia molto con tali angoli, e dunque le proprietà direzionali del campo irradiato sono essenzialmente determinate dall'andamento del Fattore di Array.

E'importante sottolineare che il Fattore di Array è una funzione della sola variabile θ , in quanto una eventuale dipendenza dall'angolo φ del campo irradiato sarà contenuta nell'altezza efficace delle antenne h .

Pertanto le antenne per studiare il Fattore di Array possono essere considerate come dei punti, in quanto il Fattore di array dipende unicamente dalla posizione e dall'eccitazione delle antenne che compongono l'allineamento.

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Il fattore di array è la somma di una serie troncata di Fourier.

Ponendo infatti $u = \beta d \sin \theta$ si ha:

$$F(u) = \sum_n a_n e^{jnu} \quad (4)$$

da cui appare che $F(u)$ è una funzione periodica di periodo 2π della variabile u .

E' invece evidente che rispetto all'angolo fisico θ la funzione $F(\theta)$ non è una funzione periodica, essendo θ limitato, per ragioni fisiche, fra $(-\pi/2, \pi/2)$.

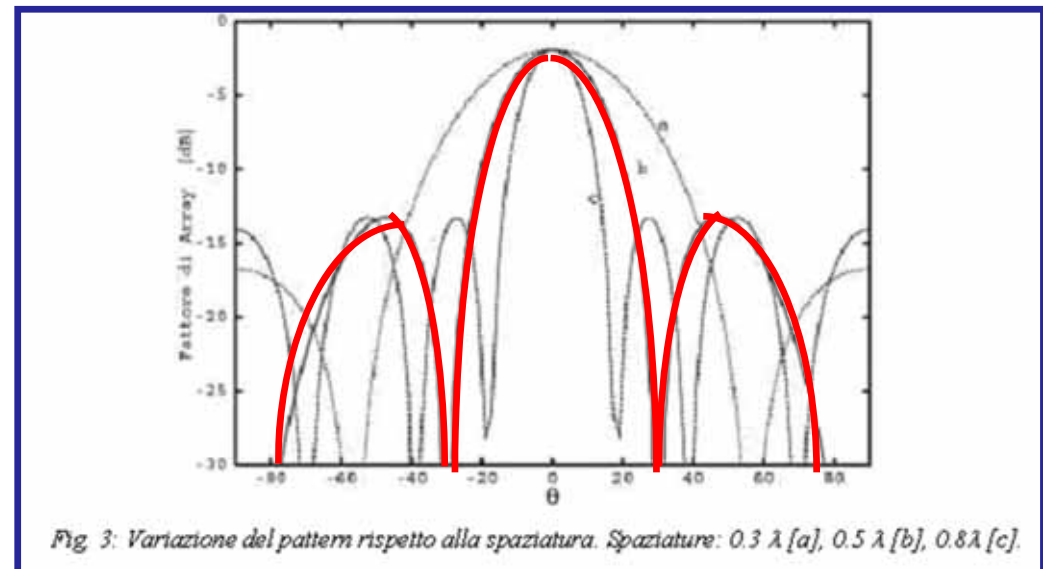
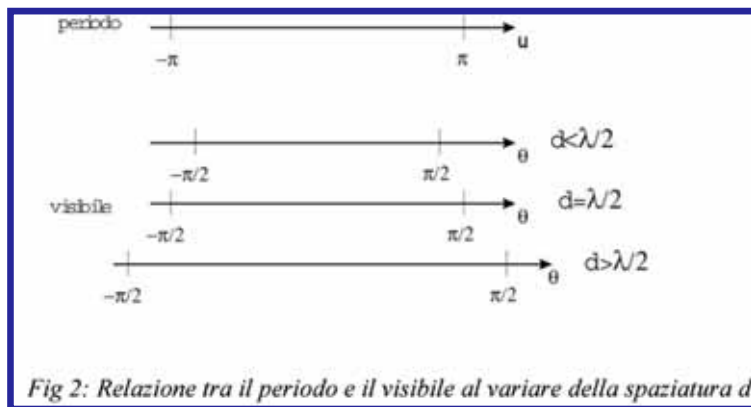
Anzi, a seconda della spaziatura, cambia la relazione tra la variabile u e l'angolo θ .

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Per spaziatura pari a mezza lunghezza d'onda $d=\lambda/2$, l'intervallo $(-\pi,\pi)$ della variabile u corrisponde all'intero intervallo di angoli fisici $(-\pi/2,\pi/2)$, che viene detto usualmente intervallo visibile; in tal caso quindi ad ogni valore di u compreso fra $(-\pi,\pi)$ corrisponde un valore di θ compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, e quindi i due domini coincidono.

In questo caso nel grafico di $F(u)$ ho un lobo centrale ed una serie di lobi laterali e, dato un certo campo visibile irradiato, la $F(u)$ è univocamente determinata.



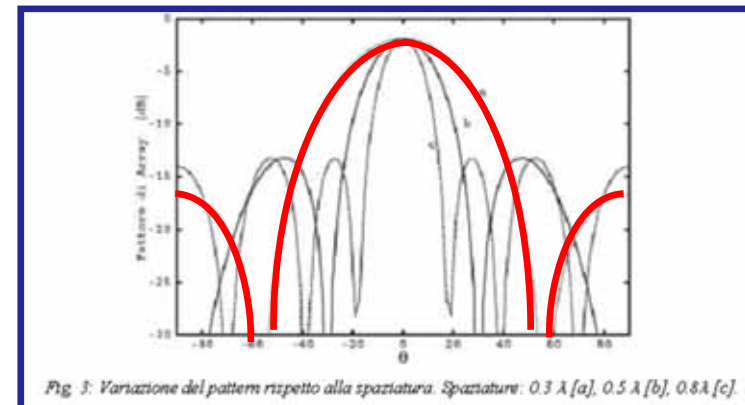
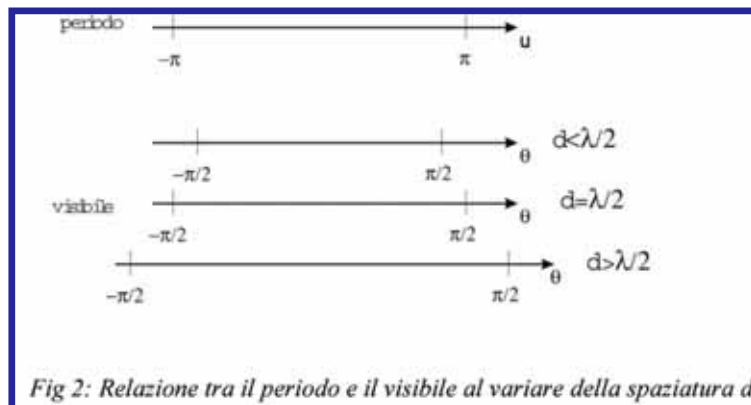
Array di Antenne

Il Fattore di Array

Se la spaziatura è minore di mezza lunghezza d'onda $d < \lambda/2$, allora solo una parte del periodo corrisponde all'intero intervallo visibile.

Pertanto lo stesso fattore di allineamento $F(u)$ corrisponde ora, rispetto alla variabile fisica θ , ad un diagramma di radiazione sempre con un lobo centrale ed una serie di lobi laterali, ma stavolta il lobo centrale è più largo; il resto del periodo in u esterno al visibile corrisponde ad angoli θ legati ad onde evanescenti.

Quindi in questo caso posso variare la $F(u)$ senza alterare il visibile (la modifico soltanto negli intervalli del periodo in u esterni al visibile) e pertanto $F(u)$ non è univocamente determinata.



Array di Antenne

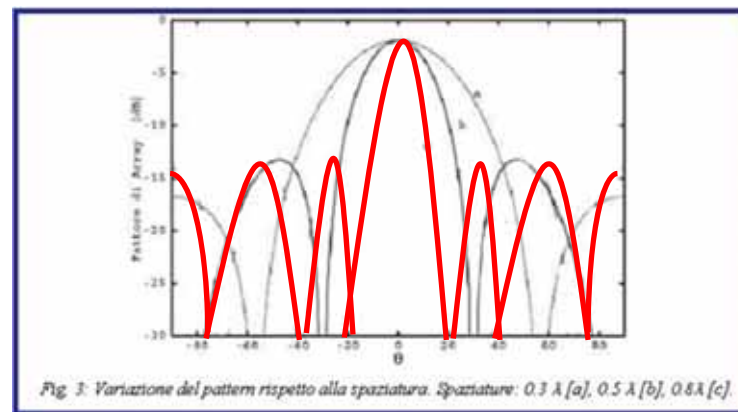
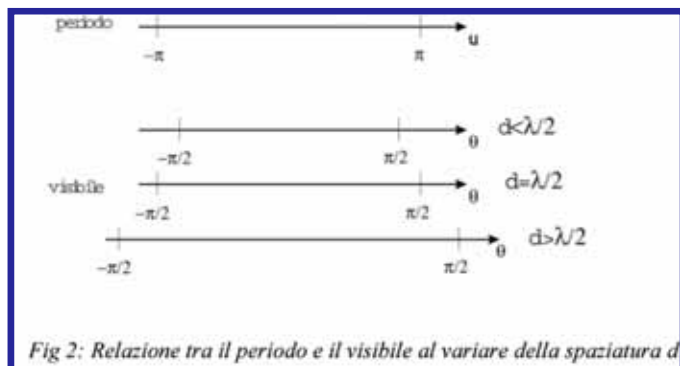
Il Fattore di Array

Se infine consideriamo il caso in cui la spaziatura è maggiore di mezza lunghezza d'onda $d > \lambda/2$, sarà il periodo in u a corrispondere solo a una parte del dominio visibile in θ , e più precisamente alla sua parte centrale.

Le zone più esterne del dominio visibile, corrisponderanno quindi a periodi della funzione $F(u)$ diversi da quello centrale.

Poichè però, evidentemente, i vari periodi sono tra loro uguali, il diagramma di radiazione dell'allineamento si ripeterà in maniera, almeno qualitativamente, periodica (ed avrò così più lobi laterali nel visibile).

Quindi il numero degli zeri nel periodo fondamentale in u , $(-\pi, \pi)$, aumenta, ma questo non mi creerebbe problemi; il problema è che ad un certo punto verrà ripetuto anche il lobo centrale, con una drastica riduzione della direttività e di conseguenza del guadagno dell'array.



Array di Antenne

Il Fattore di Array

Ad esempio, per una spaziatura superiore a una lunghezza d'onda, le due zone esterne, ovvero per $\theta = \pm\pi/2$, avranno la stessa forma della zona centrale, ovvero quella corrispondente a $\theta = 0$.

Se il diagramma di radiazione ha un massimo per $\theta = 0$, conterrà allora altri due massimi per angoli molto prossimi a $\pm\pi/2$ (vedi Fig. 4).

Tali massimi spuri vengono detti grating lobes e evidentemente riducono notevolmente il guadagno dell'allineamento.

Essi sono dovuti unicamente alla periodicità di $F(u)$ e, ad esempio, per $d = \lambda$, portano ad un dimezzamento della direttività rispetto al suo valore quando $d = \lambda/2$.

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Per evitarli occorre scegliere una spaziatura non troppo grande, il cui valore, come vedremo successivamente, dipende anche dall'angolo in cui si vuole ottenere il massimo di irradiazione.

Va comunque ricordato che anche l'altezza efficace h contribuisce al diagramma di irradiazione.

Se tale altezza efficace è molto piccola, o addirittura nulla, in corrispondenza dei grating lobes, allora questi ultimi scompaiono dal campo irradiato dall'allineamento.

Array di Antenne

Il Fattore di Array

Si noti che, aumentando la spaziatura, si riduce il lobo centrale (infatti l'antenna complessiva è più grande).

Si ottiene dunque un'antenna più grande con lo stesso numero di elementi.

Quindi in teoria si potrebbe aumentare indefinitamente il guadagno aumentando la spaziatura.

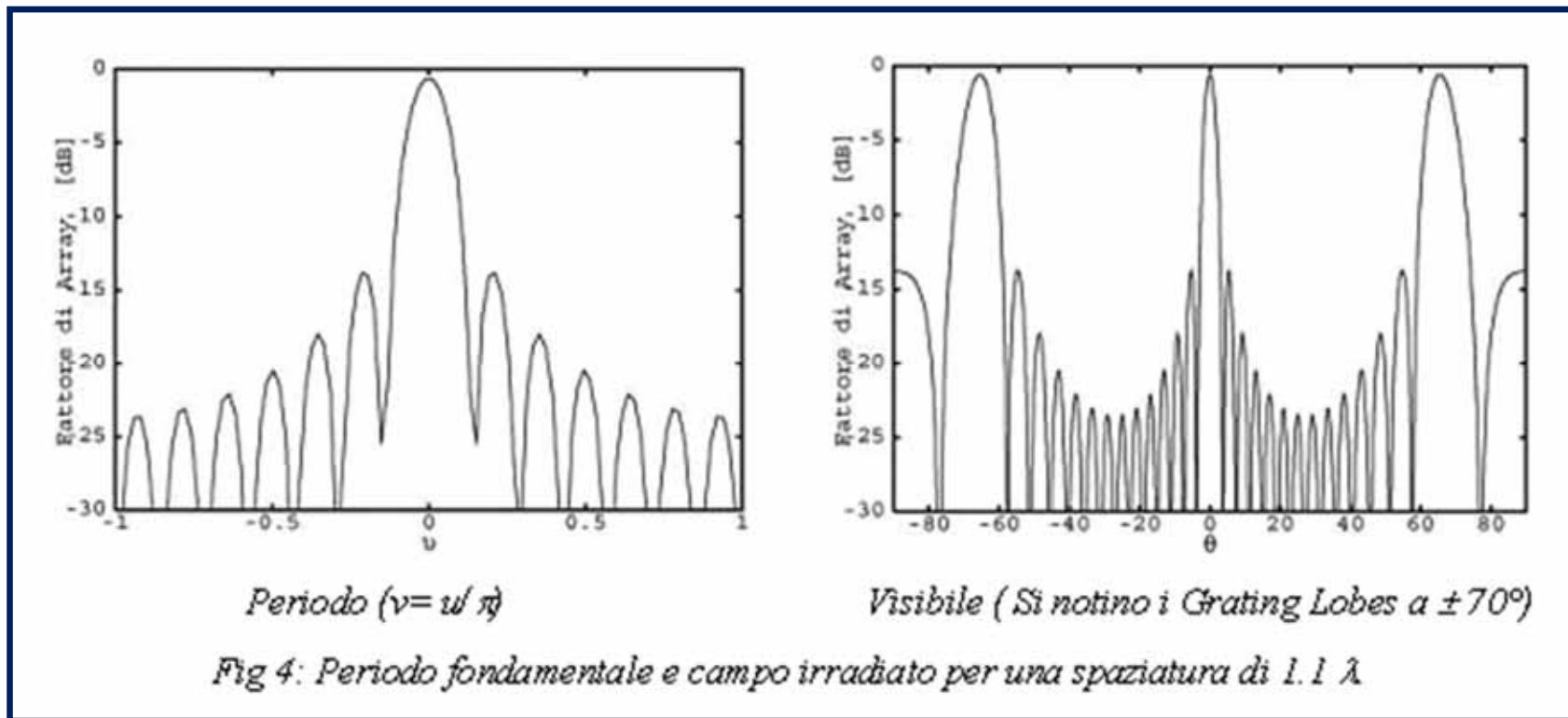
In realtà non è così. Infatti, dato che la $F(u)$ è periodica, per $\beta d \sin \theta = 2\pi$ si ha un altro massimo (grating lobe).

Se inoltre si usano spaziature non periodiche, allora il Fattore di Array non è più periodico nemmeno in u , ed i grating lobes scompaiono, ma aumenta il livello dei lobi laterali.

Array di Antenne

Il Fattore di Array

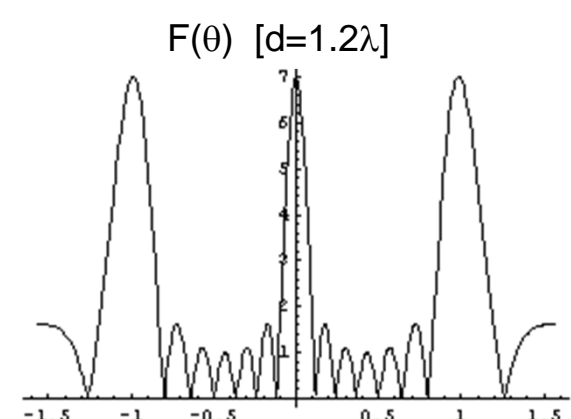
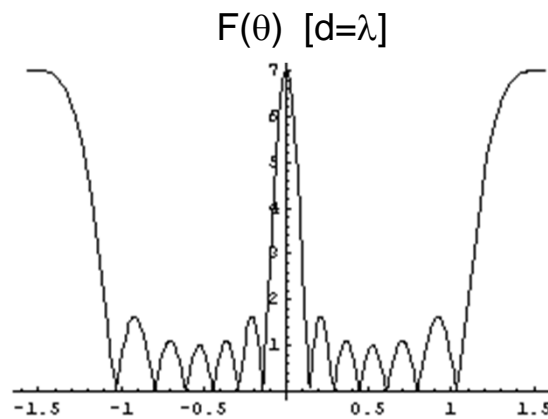
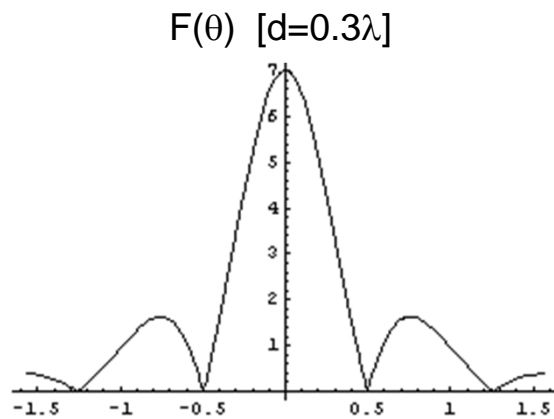
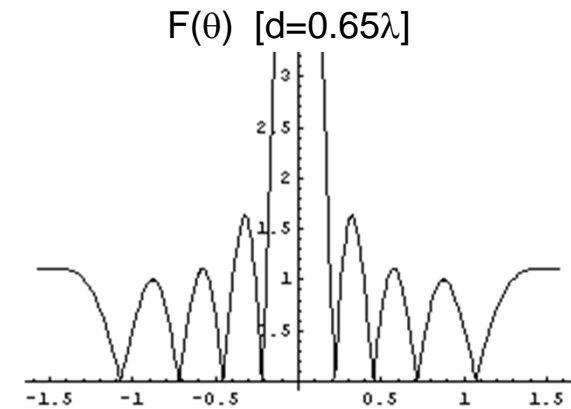
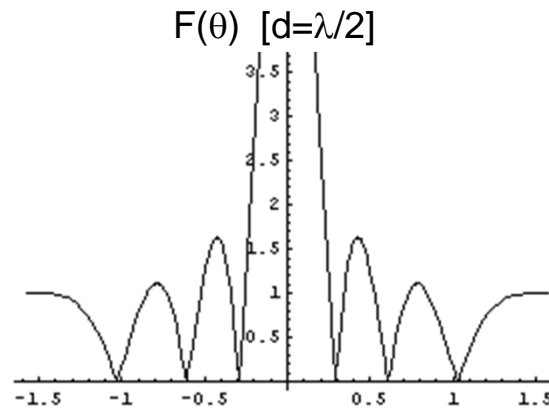
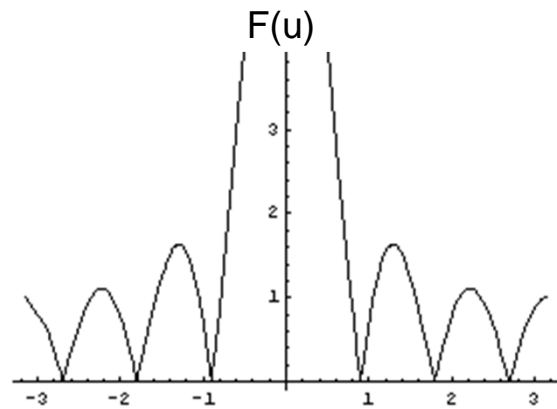
Quindi in sostanza esistono tre modi per evitare i lobi spuri nel mio diagramma di irradiazione: scegliere spaziature più piccole, fare in modo che gli zeri dell'altezza efficace cadano in corrispondenza dei grating lobes, variare la spaziatura fra le antenne rendendo $F(u)$ aperiodica.



Array di Antenne

Il Fattore di Array

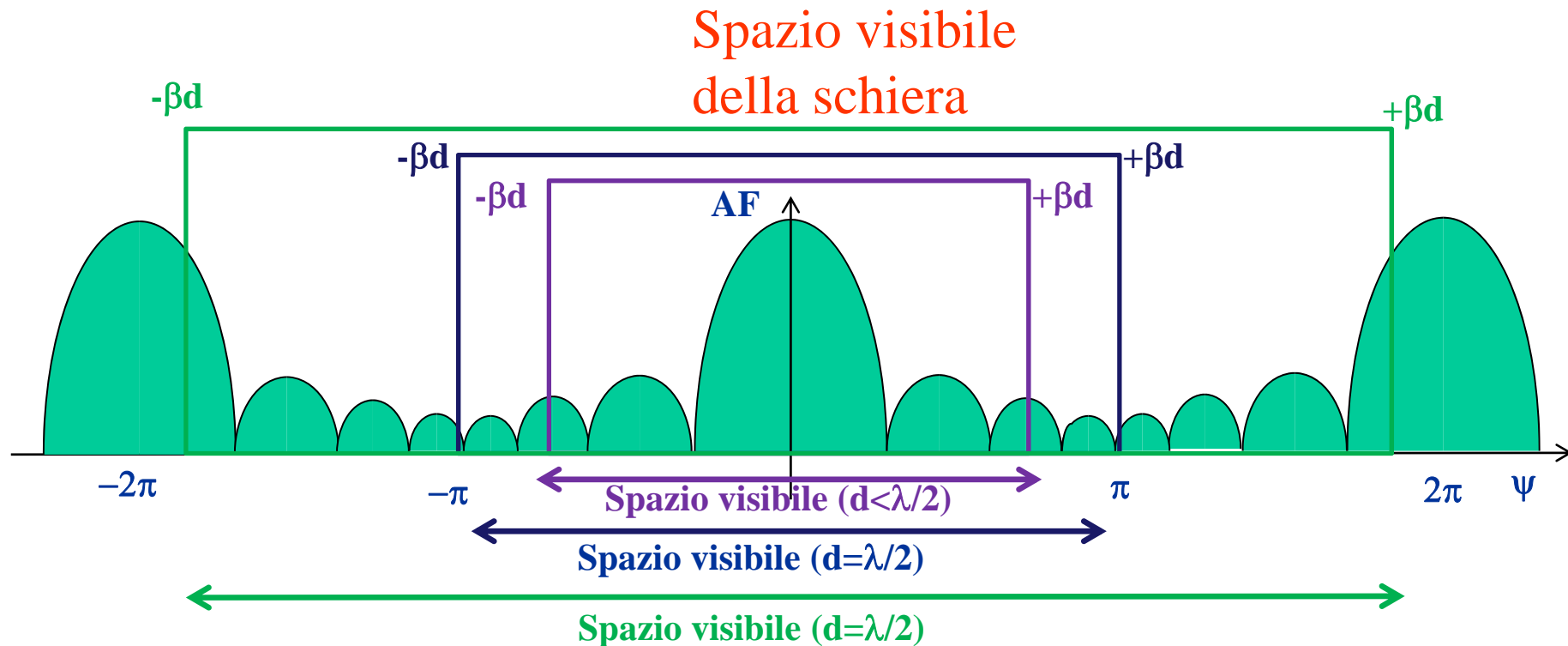
Esempio con 6 elementi:



Array di Antenne

Il Fattore di Array

La finestra del dopminio visibile si allarga o si restringe in base alla spaziatura.



Può capitare che nello spazio visibile cada più di un lobo principale: tali lobi vengono definiti “Grating Lobes”

Array di Antenne

Array Uniforme

Consideriamo un array che abbia le eccitazioni costanti in modulo e con fase che varia linearmente lungo l'allineamento:

$$a_n = e^{-jn\psi} \quad (6)$$

Sostituendo le eccitazioni della (6) nell'espressione del fattore di allineamento si trova allora, a parte un fattore di fase inessenziale che dipende da dove metto il centro di fase (se è al centro dell'array tale fattore di fase non compare, o meglio è unitario):

$$F(u) = \sum e^{jn(u-\psi)} = \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(u-\psi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(u-\psi)\right]}$$

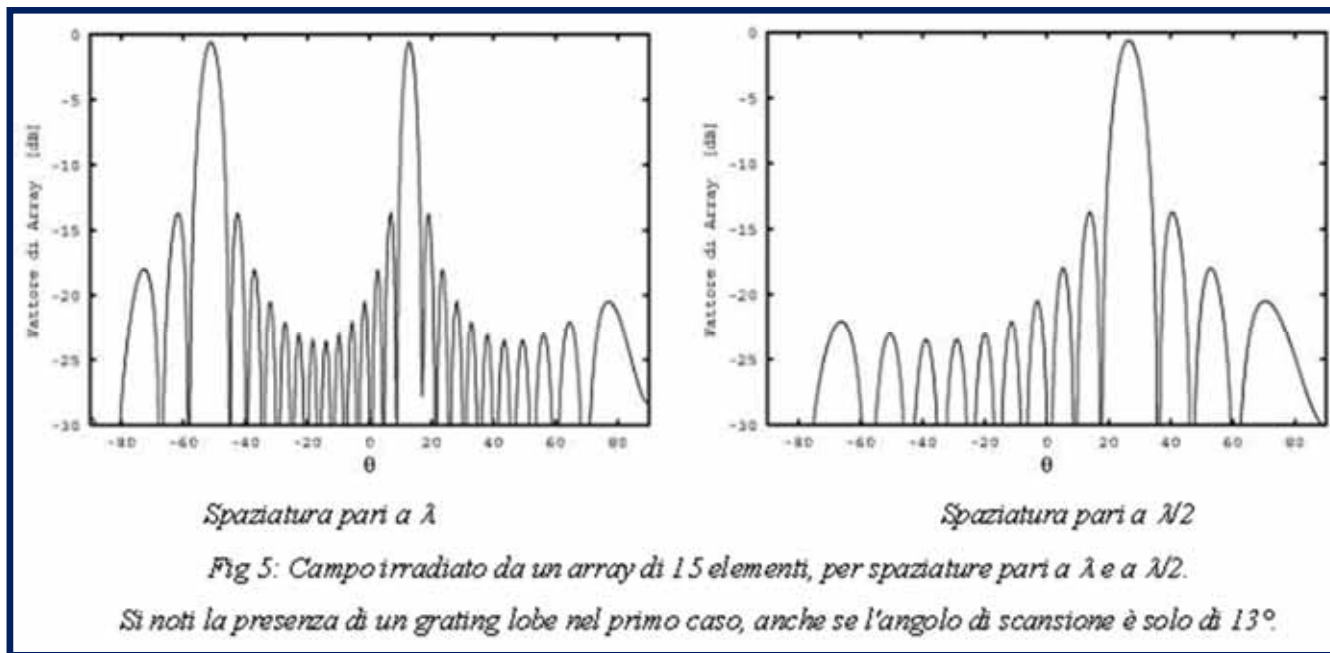
Array di Antenne

Array Uniforme

La funzione $F(u)$ ha un massimo per $u=\psi$, che vale N .

Ne segue che la progressione di fase lungo l'allineamento determina la posizione del massimo di radiazione.

Naturalmente l'angolo fisico θ in cui si trova tale massimo dipende anche dalla spaziatura dell'allineamento.



Se la spaziatura è maggiore di mezza lunghezza d'onda, anche gli altri massimi, che si trovano in $u=\psi \pm 2n\pi$, possono rientrare nel dominio visibile.

Array di Antenne

Array Uniforme

Se consideriamo il caso di figura, in cui $\psi = .445\pi$, in cui l'allineamento ha spaziatura pari a una lunghezza d'onda, troviamo che anche il massimo in $\psi - 2\pi$ rientra nel visibile.

Si ha pertanto un massimo per 13° , e un grating lobe in -52° .

Per spaziatura pari a mezza lunghezza d'onda, si ha un unico massimo per 26° .

Gli zeri del fattore di array (7) per una progressione di fase ψ , si trovano in corrispondenza di $u = \psi + 2n\pi/N$, con $n \neq 0$, poiché per $n=0$ ho la condizione di massimo (forma 0/0).

L'angolo fisico di puntamento θ_m varrà ovviamente, per una certa progressione di fase ψ :

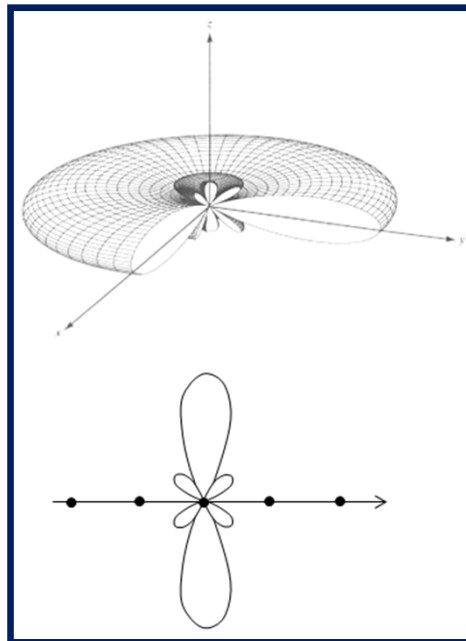
$$\beta d \sin \vartheta_m = \psi \quad \rightarrow \quad \vartheta_m = \arcsin(\psi / \beta d)$$

Array di Antenne

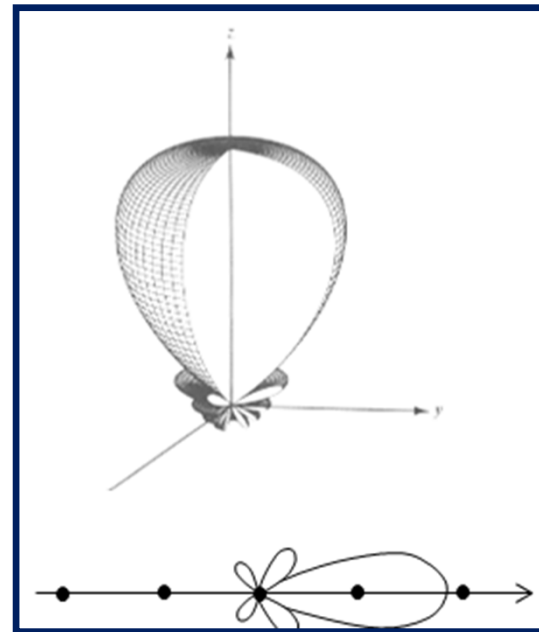
Array Uniforme

Si noti che la relazione fra angolo fisico θ_m e angolo di progressione di fase ψ non è lineare: in termini di θ il diagramma di irradiazione si deforma leggermente.

Se la direzione di puntamento è ortogonale all'array ($\theta_m=0$), l'array è di tipo broadside; se invece la direzione di puntamento è in direzione dell'asse dell'allineamento ($\theta_m=\pi/2$), l'array è di tipo endfire.



**Array
Broadside**



**Array
Endfire**

Array di Antenne

Array Uniforme

Come già detto, per spaziatura pari a mezza lunghezza d'onda, si ha sempre un unico massimo, indipendentemente dall'angolo di puntamento del fascio.

Man mano che la spaziatura cresce, invece, la richiesta di non avere grating lobe costringe a limitare l'angolo di scansione.

Addirittura, per spaziatura pari a una lunghezza d'onda si hanno grating lobe qualunque sia l'angolo di scansione.

Persino se il fascio è centrato, ovvero ha un massimo per $\theta=0$, compare un grating lobe per $\theta=\pi/2$, che può eventualmente essere eliminato dall'altezza efficace della singola antenna, qualora questa abbia un nullo per tali angoli.

Array di Antenne

Array Uniforme

Infatti, poiché il fattore di array è periodico, se ψ cresce possono comparire nel visibile dei grating lobes; pertanto ψ non può crescere più di un certo angolo, e tale angolo limite dipende dalla spaziatura fra le antenne.

I grating lobes si hanno quando $u = \psi \pm 2\pi$, se $d > \lambda/2$ può capitare che $\psi + 2\pi$ oppure $\psi - 2\pi$ cadano nel visibile. Per evitare quindi la comparsa di grating lobes nel visibile dobbiamo imporre una limitazione a ψ , che sarà:

$$\psi - 2\pi < -\beta d \quad \rightarrow \quad \psi < 2\pi - \beta d$$

$$\psi + 2\pi > \beta d \quad \rightarrow \quad \psi > \beta d - 2\pi$$

Array di Antenne

Array Uniforme

Per determinare l'angolo massimo di scansione θ_M in dipendenza dal valore della spaziatura, consideriamo la prima condizione di comparsa di un grating lobe, supponendo ψ positivo:

$$\psi_M - 2\pi = -\beta d \quad \rightarrow \quad \beta d \sin \vartheta_M = -\beta d + 2\pi \quad \rightarrow \quad \sin \vartheta_M = (2\pi - \beta d) / \beta d \quad (8)$$

e quindi gli angoli massimi di scansione risultano

$$\vartheta_M = \arcsin \left[\pm \left(\frac{2\pi}{\beta d} - 1 \right) \right] \quad (9)$$

Perciò, fissata la spaziatura, non posso avere massimi di puntamento dappertutto, ma solo fino all'angolo θ_M .

Viceversa, fissato l'angolo di scansione, allora la (9) mi dà la massima spaziatura ammissibile.

Array di Antenne

Array Uniforme

Ad esempio, se $\beta d = \pi$ ho che $\sin \theta_M < 1$ è sempre verificata e quindi posso avere angoli di puntamento qualsiasi per spaziatura pari a $\lambda/2$.

Ma se ad esempio $d = 0.7\lambda$, allora ho che $\beta d = 1.4\pi$ e l'angolo massimo di puntamento si riduce a $\theta_M = 30^\circ$.

Questa limitazione è particolarmente sentita per quegli array, detti phased array, che utilizzano una progressione di fase delle eccitazioni variabile per spostare la direzione di puntamento.

Per gli allineamenti a fascio fisso, invece, non vi è sostanzialmente limitazione dovuta ai grating lobes per gli array con $\psi = 0$, che hanno un massimo nella direzione ortogonale all'asse z, detti array broadside.

Invece per gli array che hanno direzione di puntamento pari a $\pi/2$ o a $-\pi/2$, detti array endfire, e per i quali si richiede, o meglio, come vedremo più avanti, si richiederebbe, $\psi = \pm \beta d$, la spaziatura deve essere pari, o addirittura inferiore, a mezza lunghezza d'onda.

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Al variare di ψ il fascio di un allineamento, considerato come funzione della variabile u , trasla orizzontalmente senza cambiare forma.

Anche se i coefficienti delle eccitazioni a_n variano in modulo, purchè mantengano però una progressione di fase lineare, le considerazioni fatte sull'angolo di puntamento restano invariate; in tal caso cambierà solo la forma della $F(u)$ rispetto a quella che si ha per eccitazioni tutte uguali in modulo.

Per studiare le caratteristiche di irradiazione di un allineamento uniforme, quindi, conviene utilizzare come variabile $\Psi = u - \psi$, e quindi come fattore di allineamento:

$$F(\Psi) = \frac{\sin\left[\frac{N}{2}\Psi\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\Psi\right]} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \Psi &= u - \psi \\ u &= \beta d \sin \vartheta \\ \psi &= \beta d \sin \vartheta_M \end{aligned} \quad (10)$$

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Il diagramma di irradiazione contiene un massimo per $\Psi=0$, e un certo numero di zeri, i quali sono le soluzioni di

$$\sin\left[\frac{N}{2}\Psi\right]=0 \quad \rightarrow \quad \frac{N}{2}\Psi = n\pi \quad \rightarrow \quad \Psi = \frac{2n\pi}{N} \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (11)$$

e sono quindi in numero pari a $N-1$ (ovviamente lo zero centrale per $n=0$, è in realtà il massimo e non conta) ed equispaziati.

In particolare la larghezza del lobo centrale si ottiene considerando la distanza tra i due zeri più vicini al massimo.

Detti Ψ_π tali zeri, risulta evidentemente

$$\Psi_\pi = \pm \frac{2\pi}{N} \quad (12)$$

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

La larghezza di fascio in Ψ risulta quindi $4\pi/N$ (quindi più antenne metto, più tale lobo si restringe).

Per ottenere la larghezza reale del fascio, BW, ossia la larghezza di fascio in termini di angoli fisici, occorre ovviamente considerare anche la spaziatura dell'allineamento e la direzione θ_M di puntamento.

Indichiamo con θ_π l'angolo corrispondente a Ψ_π .

Essendo $\psi = \beta d \sin \theta_M$, risulta che il primo zero si trova in corrispondenza di:

$$\begin{aligned}\Psi = u - \psi &= \frac{2\pi}{N} \rightarrow \beta d \sin \vartheta - \beta d \sin \vartheta_M = \frac{2\pi}{N} \\ \rightarrow \beta d (\sin \vartheta_\pi - \sin \vartheta_M) &= \frac{2\pi}{N}\end{aligned}\tag{13}$$

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Iniziamo a considerare il caso di un array broadside.

Allora $\theta_M=0$ e, se N è elevato, si può approssimare $\sin\theta_\pi$ col suo argomento ottenendo per la larghezza di fascio tra gli zeri BW_π :

$$BW_\pi = 2\vartheta_\pi = 2 \frac{1}{\beta d} \frac{2\pi}{N} = \frac{4\pi}{\beta(Nd)} = \frac{2\lambda}{L} \quad (14)$$

in cui $L = Nd$ è la lunghezza dell'allineamento.

Poichè quanto più è piccola la larghezza di fascio, tanto più è grande la direttività di una antenna, si vede che quest'ultima aumenta al crescere della lunghezza dell'allineamento, e quindi, fissata la spaziatura, al crescere del numero di antenne dell'allineamento medesimo.

La larghezza di fascio (14) è valida solo per un array broadside.

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

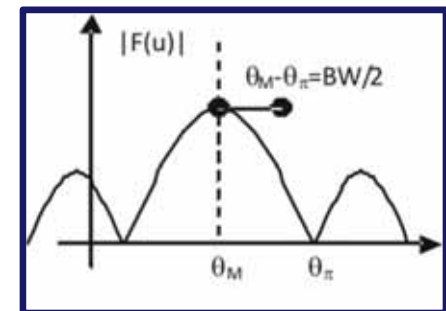
Per angoli diversi di puntamento (escludendo per ora il caso endfire, che richiede una trattazione separata) conviene utilizzare nella (13) le formule di Werner, ottenendo:

$$\beta d(\sin \vartheta_{\pi} - \sin \vartheta_M) = \beta d \left[2 \cos \left(\frac{\vartheta_{\pi} + \vartheta_M}{2} \right) \sin \left(\frac{\vartheta_{\pi} - \vartheta_M}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{N}$$

Se N è grande, allora il fascio è stretto e posso approssimare $\theta_M \approx \theta_{\pi}$.

Approssimando la funzione seno col suo argomento (che è quindi piccolo), pari a $BW_{\pi}/4$ (essendo $BW_{\pi} = 2(\theta_{\pi} - \theta_M)$), e l'argomento della funzione coseno con θ_M , otteniamo:

$$2 \beta d \cos \vartheta_M \frac{BW_{\pi}}{4} = \frac{2\pi}{N} \quad \rightarrow \quad BW_{\pi} = \frac{2\lambda}{L \cos \vartheta_M} \quad (15)$$



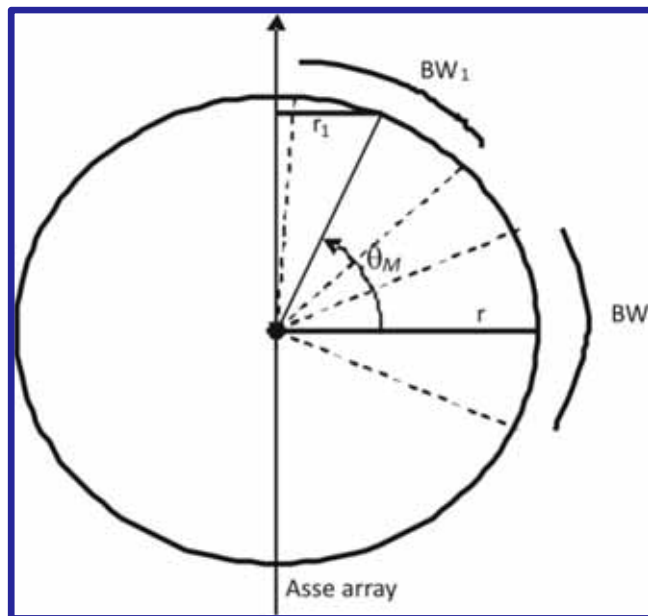
Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Al crescere dell'angolo di puntamento il fascio si allarga (per ψ crescenti, BW cresce).

In ogni caso, la direttività resta sostanzialmente costante.

Infatti il diagramma di irradiazione di un allineamento lineare ha una simmetria di rotazione lungo l'asse z.



Per fascio centrato ho come area illuminata un cilindro di raggio r e di altezza $h \cong BW$.

Quindi l'area della superficie illuminata in tale caso è:

$$A_I = 2\pi r * h \cong 2\pi r * BW$$

Per fascio de-centrato ho come area illuminata un cilindro di raggio $r_1 = r * \cos\theta_M$ e di altezza $h_1 \cong BW_1 = BW / \cos\theta_M$.

Quindi l'area della superficie illuminata in tale caso è:

$$A_I = 2\pi r_1 * h_1 \cong 2\pi (r * \cos\theta_M) * BW / \cos\theta_M = 2\pi r * BW$$

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Quindi la zona illuminata è una superficie cilindrica di asse l'asse z , e di raggio proporzionale a $\cos\theta_M$.

Poichè l' altezza di tale cilindro, data dalla (15), è inversamente proporzionale a $\cos\theta_M$, l'area della regione illuminata, e quindi la direttività, sono sostanzialmente costanti con θ_M .

Oltre alla larghezza di fascio tra gli zeri, è in genere utilizzata la larghezza di fascio a 3dB, ovvero l'intervallo angolare in cui il diagramma di radiazione (col massimo normalizzato a 1) ha una ampiezza superiore a -3dB (ovvero a $\sqrt{2}/2$).

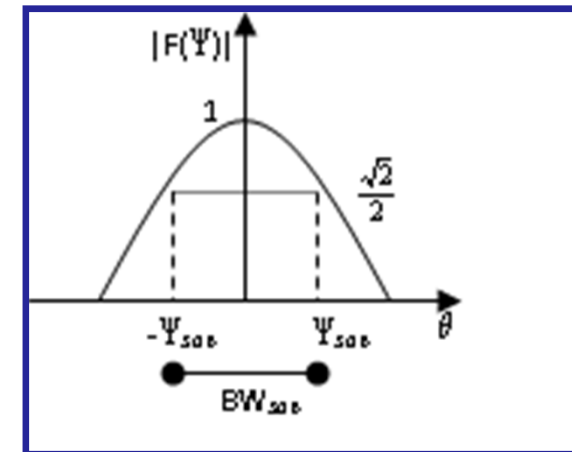
Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Per calcolare tale larghezza di fascio BW_3 occorre trovare gli angoli θ_3 corrispondenti a -3dB, lavorando sulla $F()$ normalizzata, ossia divisa per il suo valore massimo, che è N : $F_N(\Psi)=F(\Psi)/N$.

Indicando con Ψ_3 i valori dell' argomento di $F(\cdot)$ corrispondenti, occorre risolvere l' equazione:

$$F_N(\Psi_3) = \frac{\sin\left[\frac{N}{2}\Psi_3\right]}{N \sin\left[\frac{1}{2}\Psi_3\right]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (16)$$



Il secondo membro è pari a $1/\sqrt{2}$, in modo che il modulo quadro di $F()$ sia la metà (ovvero 3 dB) del valore massimo (in questo caso il massimo è 1, dato che la $F()$ è normalizzata).

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Possiamo approssimare il denominatore con il primo termine dello sviluppo di Taylor della funzione seno, e il numeratore con lo sviluppo di Taylor al terzo ordine (in quanto l'argomento di $\sin(\cdot)$ è ora considerevolmente più grande), ottenendo:

$$\frac{\frac{N}{2}\Psi_3 - \frac{1}{6}\left(\frac{N}{2}\Psi_3\right)^3}{\frac{N\Psi_3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{N}{2}\Psi_3\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Risolvendo l'equazione si trova

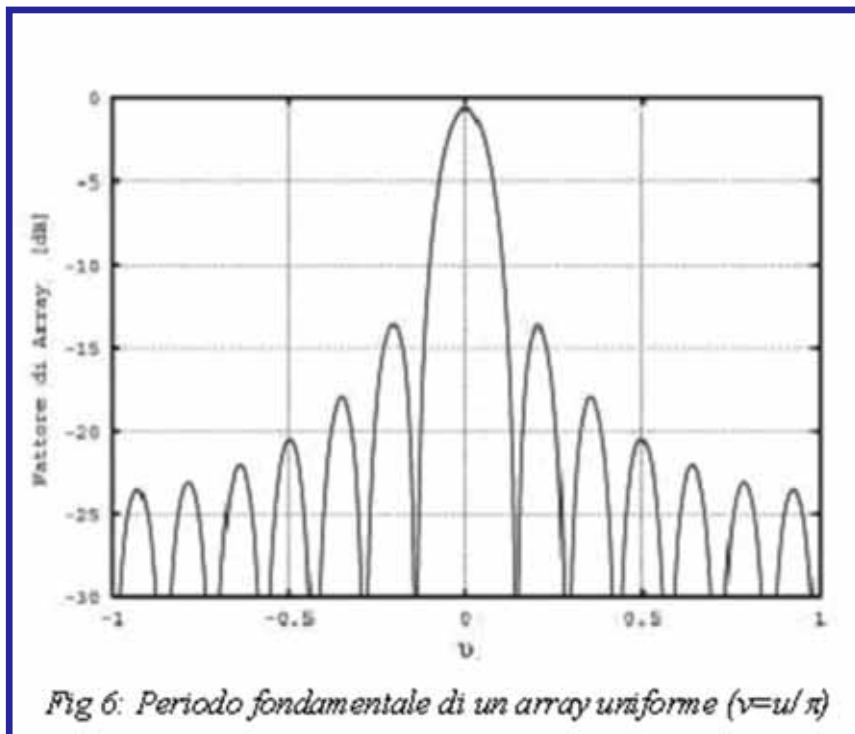
$$\Psi_3 = \frac{2\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{N} = \frac{2.65}{N} \quad (18)$$

Le larghezze di fascio reali si ottengono sostituendo Ψ_3 dato dalla (18) a Ψ_π dato dalla (12).

Array di Antenne

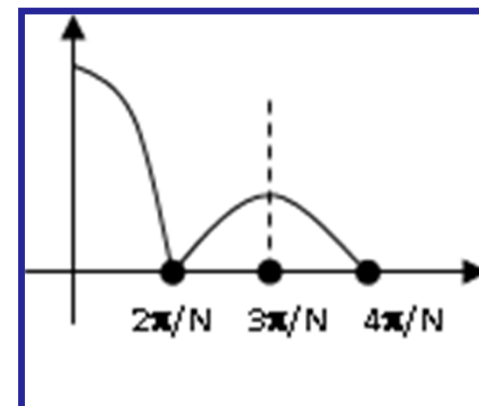
IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Oltre al massimo centrale, sono presenti nel periodo un certo numero di altri massimi relativi, più piccoli, detti lobi laterali.



Il fattore di array ha esattamente $N-1$ zeri ed $N-1$ massimi relativi (lobi laterali) in ogni periodo.

Tali lobi sono sostanzialmente equispaziati e si trovano nel punto medio tra gli zeri.



Pertanto il primo lobo laterale si trova in corrispondenza del secondo massimo del numeratore, approssimativamente in $u_L = 3\pi/N$ e il suo valore è evidentemente $F(u_L) = 2N/3\pi$.

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Infatti gli zeri di $F(u)$ si trovano in $N\Psi/2=n\pi$, e quindi il primo zero è in π , ed il secondo in 2π . Per cui il primo massimo si trova circa a metà fra π e 2π , ossia a $3\pi/2$ [quindi per $N\Psi/2=3\pi/2 \rightarrow \Psi=3\pi/N$].

Sostituendo si ha (se N è grande):

$$\left| F_N(3\pi / N) \right| = \frac{1}{N \sin[3\pi / 2N]} \cong \frac{1}{N 3\pi / 2N} = \frac{2}{3\pi} \cong -13dB$$

Il rapporto tra l'ampiezza del massimo e quella del primo lobo laterale viene detta livello dei lobi laterali, e si indica in genere con SLL.

Per un array uniforme il livello dei lobi laterali è di 13.5 dB, ed è indipendente dal numero delle antenne, come si è appena visto.

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Questo SLL può sembrare buono (lo è ad esempio per un sistema in trasmissione), ma non lo è per un sistema radar.

Infatti, in tal caso, l'eco di un oggetto viene sentito durante la scansione anche dal primo lobo laterale, ottenendo così 3 oggetti differenti che in realtà sono lo stesso oggetto.

Perciò per un sistema radar è opportuno usare almeno un SLL di $-20\div-22$ dB, anche se di solito si arriva fino a $-30\div-35$ dB.

Per ottenere un livello più basso di lobi laterali sono necessarie distribuzioni di eccitazioni che abbiano modulo variabile lungo l'allineamento, ad esempio eccitazioni che siano in modulo rastremate o tapered (massime al centro e minime ai lati).

Array di Antenne

IL PERIODO FONDAMENTALE DI UN ALLINEAMENTO UNIFORME

Ciò però aumenta la larghezza del lobo centrale e perciò diminuisce il guadagno.

Infatti con una distribuzione rastremata le antenne che pesano di più sono quelle centrali, mentre quelle laterali contano poco.

Quindi è come se avessi un array più corto, e dunque il lobo centrale è più largo.

Comunque questo va bene per un sistema radar in cui il requisito primario è avere un SLL molto basso.

Non va bene invece in un sistema di trasmissione in cui il requisito fondamentale è il guadagno.

Vedremo più avanti come tali distribuzioni riducono il guadagno e la direttività dell'allineamento.

Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

Per quanto detto nei paragrafi precedenti, un array di tipo endfire richiede una progressione di fase lungo l'allineamento pari a βd .

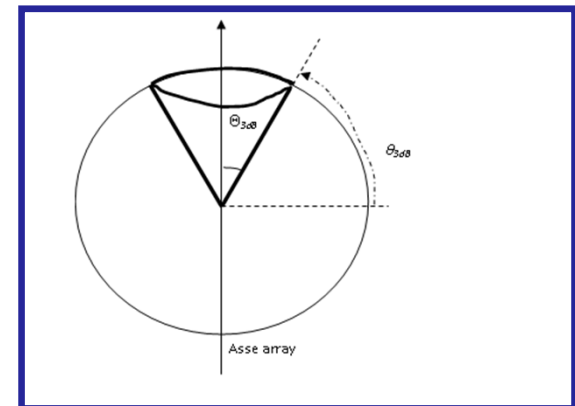
Come mostrato dalla figura, questo equivale a porre il massimo del fattore di allineamento nel periodo esattamente in corrispondenza di $\theta = \pi/2$.

Infatti se voglio che il massimo di puntamento sia all'estremo del periodo, devo avere $\psi = \beta d$ in termini della variabile u , che corrisponde a $\theta = \pi/2$ in termini di angoli fisici.

In tal modo la larghezza di fascio è quella standard di un allineamento.

Dalla (18) si ottiene quindi

$$\sin \vartheta_3 - 1 = -\frac{2.65}{\beta L} \quad (19)$$



Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

L'angolo corrispondente alla larghezza di fascio a 3 dB è infatti dato da:

$$\Psi_3 = \mp \frac{2.65}{N}$$

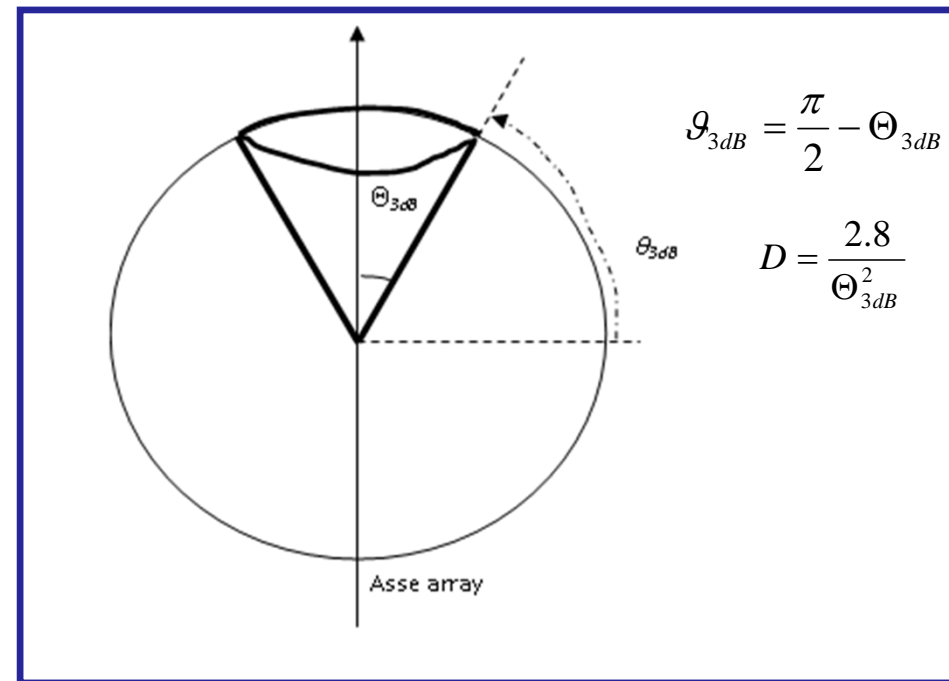
e per endfire si ha $\psi = \beta d$.

Quindi:

$$\Psi_3 = u - \psi = \beta d \sin \vartheta_{3dB} - \beta d = -\frac{2.65}{N}$$

→

$$\sin \vartheta_{3dB} - 1 = -\frac{2.65}{\beta N d} = -\frac{2.65}{\beta L}$$



In figura è mostrata la larghezza di fascio in termini di area illuminata.

Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

Il fascio irradiato è ora di tipo conico, attorno all'asse z (e non più cilindrico, come nel caso broadside).

Possiamo quindi calcolarne il guadagno vero (se non vi è irradiazione verso $\theta=\pi/2$) a partire dalla larghezza di fascio a 3dB nei due tagli principali, pari a $\Theta_3=\pi/2-\theta_3$, che possiamo ricavare sostituendo nella (19) e nelle espressioni appena ricavate:

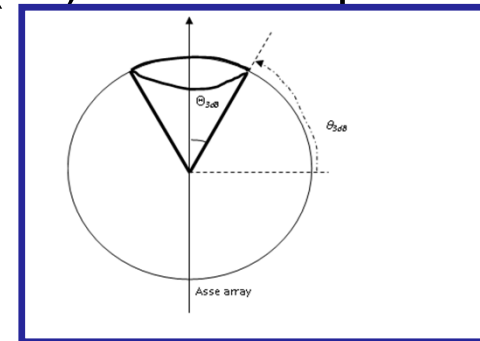
$$\sin \vartheta_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_3\right) = \cos \Theta_3 \cong 1 - \frac{1}{2} \Theta_3^2$$

da cui:

$$\cos \Theta_{3dB} - 1 = -\frac{2.65}{\beta N d} = -\frac{2.65}{\beta L} \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{2} \Theta_{3dB}^2\right) - 1 = -\frac{2.65}{\beta L} \quad \rightarrow \quad \Theta_{3dB}^2 = \frac{5.3}{\beta L}$$

e risolvendo

$$\Theta_3 = \frac{2.3}{\sqrt{\beta L}}$$



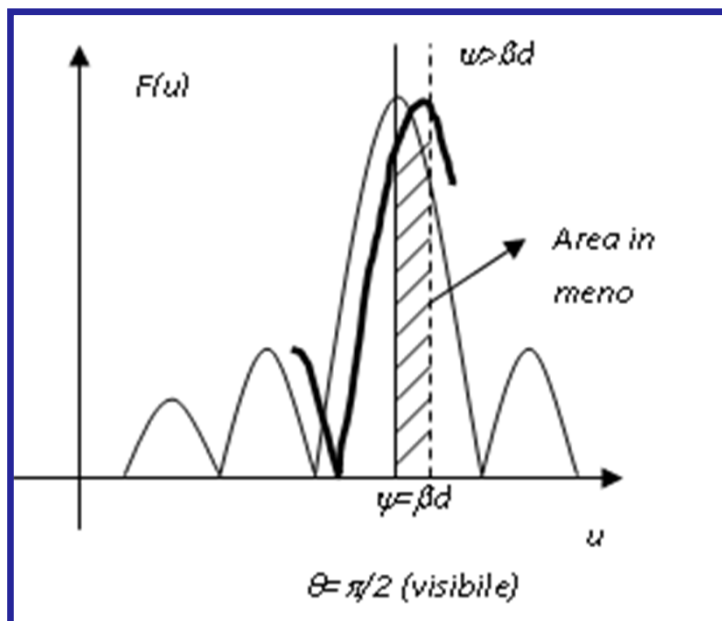
Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

Si dimostra che la direttività corrispondente è data, se Θ_3 è piccolo, da:

$$D = \frac{2.772}{\Theta_3^2} = 0.524 \beta L = 3.29 \frac{L}{\lambda}$$

Se però si aumenta ulteriormente la progressione di fase, e si utilizza una spaziatura inferiore a mezza lunghezza d'onda, il massimo del fattore di allineamento nel periodo si sposta nell'invisibile e il punto corrispondente all'estremo del visibile si va a situare sulla parte crescente del fattore di array.



➤ Se $\psi > \beta d$ (ossia se aumento la progressione di fase), la direzione endfire si ha comunque sempre per $\theta = \pi/2$, ma il valore di massimo è diventato più piccolo.

➤ Ciò significa che in termini di diagramma normalizzato, i lobi sono aumentati. Anche la direttività però aumenta, dato che nell'integrale della potenza irradiata non devo più includere il contributo dell'area che si è spostata in avanti.

➤ Sto cioè irradiando meno potenza. Se mi sposto di poco in avanti, il massimo del fattore di array è circa lo stesso, mentre la potenza irradiata molto minore.

➤ Se mi sposto molto in avanti, la tendenza si inverte: il massimo è molto più piccolo, la potenza è quasi la stessa.

Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

Questo ha due effetti: riduce la potenza irradiata nella direzione endfire, e riduce la larghezza del lobo centrale, e quindi la potenza totale irradiata.

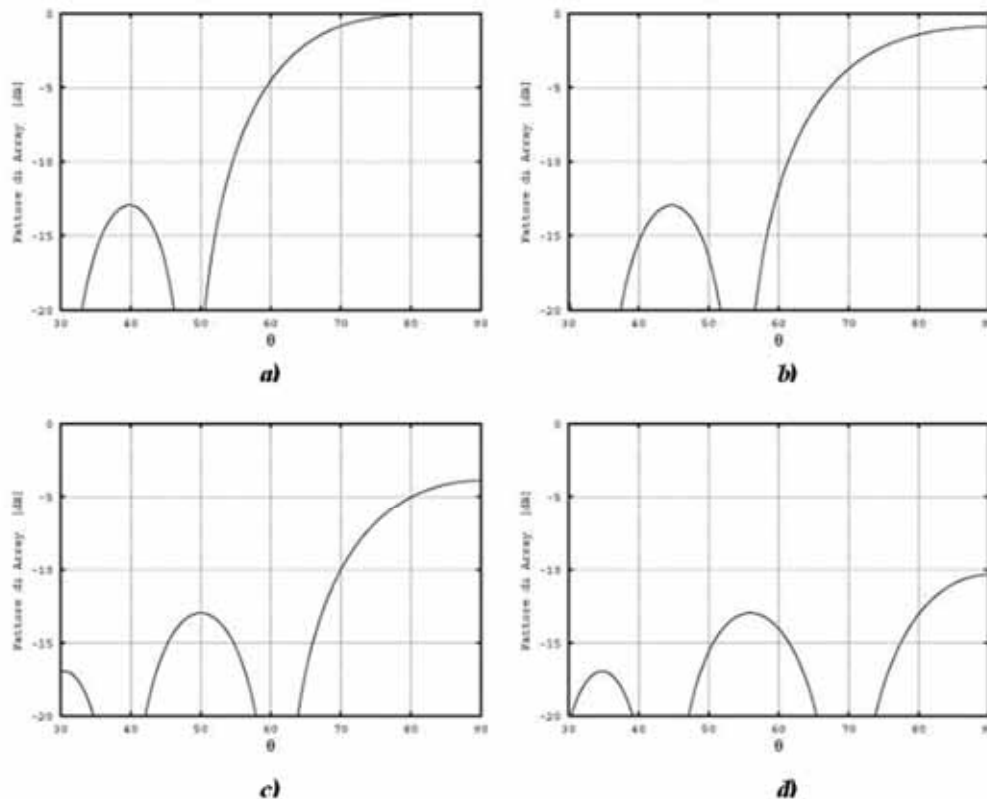


Fig. 7: Array endfire di 10 antenne con spaziatura 0.4λ . Le progressioni di fase valgono:

- a) 0.8π (endfire standard, con progressione di fase βd);
- b) 0.85π ;
- c) 0.9π (endfire Hansen - Woodyard);
- d) 0.95π

➤ Poiché nella zona del massimo il fattore di allineamento ha, come si vede dal grafico (che è sufficientemente piatto nel vertice), una variazione molto piccola mentre il suo valore assoluto è elevato, un piccolo spostamento del massimo nell'invisibile produce una piccola variazione della potenza irradiata in direzione endfire e una notevole riduzione della potenza totale irradiata, quindi un aumento della direttività dell'allineamento.

➤ Man mano che lo spostamento del massimo lo porta sempre più nell'invisibile, questo aumento di direttività si va via via riducendo fino ad annullarsi, dopo di che la direttività comincia a ridursi di nuovo.

Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

È evidente allora che conviene scegliere la progressione di fase in modo da ottenere il massimo della direttività.

Questo si ottiene sostanzialmente imponendo che la progressione di fase complessiva lungo l'allineamento sia pari a

$$N\psi = N\beta d + 2.92 \quad (21)$$

dove N è il numero di antenne dell'allineamento.

La condizione precedente viene detta condizione di Hansen-Woodyard e vale per N abbastanza grande e prevede che vi sia un incremento di fase di circa π su tutto l'allineamento.

Quindi un array di Hansen-Woodyard ha una direttività più grande di un array uniforme con lo stesso numero di antenne e la stessa spaziatura (è **superdirettivo**).

Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

La condizione di Hansen-Woodyard vale soltanto per array endfire, in quanto qualunque tipo di array non endfire ha entrambe le zone di discesa nello spazio fisico, ed il procedimento esposto non funziona, mentre per array endfire il massimo fisico non è vincolato ad essere il massimo in u .

Nell'esempio di figura 7, la larghezza di fascio di un array endfire standard (caso a) è di 27° , con un livello di lobi laterali pari a -13 dB.

Aumentando la progressione di fase (casi b e c) si ha un incremento del livello dei lobi laterali, ma si riduce, e più rapidamente, la larghezza di fascio che nel caso di un array di Hansen-Woodyard diventa di 15° , pur conservando circa -10 dB di lobi laterali.

Utilizzando la (20) si trova un incremento di circa 5 dB di direttività.

Array di Antenne

ARRAY ENDFIRE -- LA CONDIZIONE DI HANSEN-WOODYARD

A causa dell'incremento del livello dei lobi laterali, la direttività è in realtà leggermente più piccola.

Aumentando ancora la progressione di fase rispetto a quella ottimale data dalla (21) (caso d di figura 7), si ha evidentemente una ulteriore riduzione della larghezza di fascio, che però ora si accompagna a lobi laterali allo stesso livello del lobo centrale.

E' evidente che in tale ultimo caso l'array è inusabile.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Finora abbiamo considerato sostanzialmente solo array uniformi.

Per passare a descrivere altre distribuzioni di ampiezza, conviene premettere qualche considerazione sulla rappresentazione del fattore di allineamento come polinomio della variabile complessa Z .

In particolare descriveremo tale polinomio mediante l'insieme dei suoi zeri.

Partiamo da un allineamento uniforme, per il quale si ha:

$$F(u) = \sum_n a_n e^{jnu}$$

Il suo polinomio di Schelkunoff si ottiene ponendo $Z=e^{ju}$ (trasformata Z) ed è pari a:

$$F(Z) = \sum_n a_n Z^n = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_N)$$

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Tale polinomio ha N-1 zeri e posso fattorizzarlo e caratterizzare così il fattore di array mediante i suoi zeri.

Nel caso di array uniformi (coefficienti a_n tutti uguali ad 1) e, per semplicità, a fascio centrato (massimo per $\theta_M=0$), tale polinomio diventa:

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} Z^n = 1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{N-1} \quad (22)$$

per un array di N elementi.

In questo caso il polinomio è di grado N-1 ed ha pertanto N-1 zeri.

In generale, per un array costituito da N+1 antenne, il polinomio di Schelkunoff corrispondente avrà esattamente N zeri.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Moltiplicando e dividendo per $Z - 1$, si ottiene

$$F(Z) = \frac{Z^N - 1}{Z - 1} \quad (23)$$

Ricordando che, nel piano di Gauss, possiamo scrivere:

$$1 = e^{j2\pi n} \rightarrow \sqrt[N]{1} = e^{j\frac{2\pi n}{N}}$$

Dalla (23) si vede facilmente che gli zeri nel piano complesso del fattore di allineamento di un allineamento uniforme sono le radici ennesime dell'unità, ad eccezione di $Z=1$ (quella nell'origine, che infatti non è uno zero, ma è il massimo della $F(u)$).

Tali radici sono ovviamente sul cerchio unitario, in quanto corrispondono a zeri reali di $F(u)$, e sono equispaziate su tale cerchio.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Questo cerchio corrisponde al periodo fondamentale nel dominio di u .

Non essendo uno zero, il punto sull'asse reale $Z=1$ è il più distante da tutti gli altri zeri, tra di loro equispaziati.

Se consideriamo la rappresentazione mediante gli zeri del polinomio

$$F(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)....(Z - Z_N) \quad (24)$$

vediamo che l'ampiezza del fattore di allineamento in un certo punto Z del cerchio unitario dipende dalla distanza tra questo punto e i vari zeri.

Il valore per $Z=1$, che è il punto del cerchio unitario più lontano da tutti gli zeri, è dunque il massimo del fattore di allineamento.

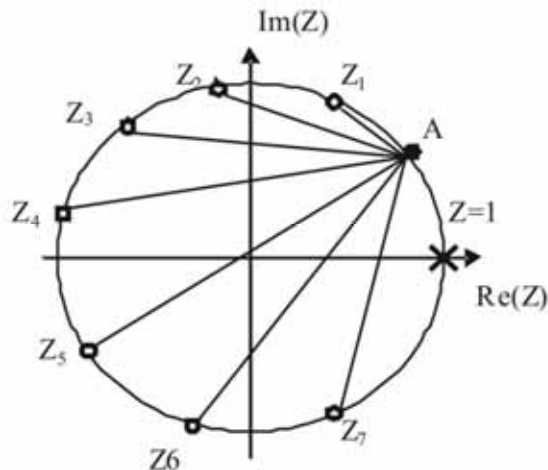
Ne segue allora che per abbassare il livello dei lobi laterali occorre avvicinare tra loro gli zeri del fattore di allineamento.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Quindi se si vuole ridurre un certo lobo laterale, si dovranno avvicinare gli zeri che identificano il lobo in esame.

Poiché però gli zeri del polinomio sono in numero fissato, è evidente che una tale operazione allargherà il lobo centrale, provocando quindi una riduzione di guadagno; infatti se avvicinano due zeri qualunque sul cerchio, la zona intorno a $Z=1$ si allarga necessariamente.



E' mostrato il cerchio unitario per un array uniforme di 7 elementi. Il polinomio valutato nel punto A è dato dal prodotto fra la distanza fra il punto A e ciascuno zero. Si vede subito che il massimo del polinomio si ha quando scelgo il punto $Z=1$, che è il più distante da tutti gli zeri.

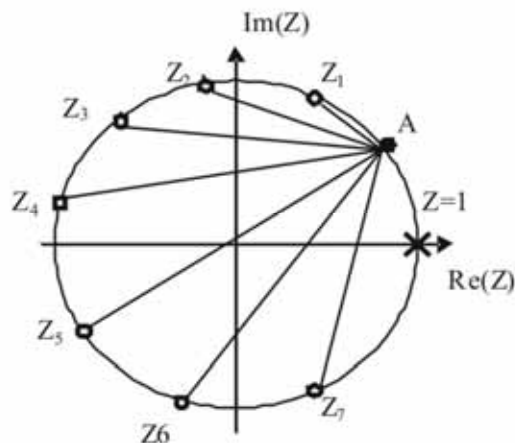
Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Supponiamo ad esempio di avvicinare i due zeri Z_2 e Z_3 spostando Z_3 verso Z_2 ; il lobo fra tali zeri scenderà di livello, ma contemporaneamente si allargherà, salendo di livello, il lobo fra Z_3 e Z_4 .

Quindi devo spostare Z_4 verso Z_3 , ma così si allargherà il lobo fra Z_4 e Z_5 ; quindi seguo lo stesso procedimento, spostando man mano gli altri zeri per far scendere i vari lobi.

Alla fine il lobo centrale sarà più largo.



E' mostrato il cerchio unitario per un array uniforme di 7 elementi. Il polinomio valutato nel punto A è dato dal prodotto fra la distanza fra il punto A e ciascuno zero. Si vede subito che il massimo del polinomio si ha quando scelgo il punto $Z=1$, che è il più distante da tutti gli zeri.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Va quindi cercato un bilanciamento tra le due esigenze di avere lobi laterali ridotti, e di avere guadagno elevato.

Tale bilanciamento, in realtà, dipende in particolare dal tipo di applicazione per cui è destinato l'allineamento.

Per allineamenti utilizzati nelle telecomunicazioni, e in particolare nel caso di ponti radio, la cosa importante è il guadagno, e quindi si utilizzeranno distribuzioni uniformi.

Nel caso invece di applicazioni radar, il livello dei lobi laterali deve essere notevolmente basso, per evitare di illuminare l'eventuale oggetto anche quando il fascio dell'allineamento punta in una direzione diversa.

In tal caso si utilizzeranno perciò distribuzioni con lobi laterali molto più piccoli, tipicamente da -20 fino a -30 dB e anche oltre.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

In realtà, esiste una distribuzione priva totalmente di lobi laterali.

Questa distribuzione deve avere tutti gli zeri nello stesso punto, e in particolare per $Z=-1$.

Calcolando il corrispondente fattore di allineamento, si trova che i suoi coefficienti, ossia le ampiezze delle eccitazioni delle antenne, sono dati dai coefficienti binomiali, ossia da:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Un tale allineamento viene detto perciò allineamento binomiale.

Tuttavia un tale allineamento ha un lobo centrale così largo da non essere quasi mai utilizzato; in pratica il lobo centrale in questo caso ricopre tutto lo spazio.

Array di Antenne

Schiere Lineari non Uniformi: schiera binomiale

Ha l'obiettivo di NON avere lobi secondari.

Consideriamo due elementi, a distanza d ed alimentati da correnti di ugual ampiezza; il fattore di schiera sarà:

$$f(z) = 1 + z$$

Sappiamo ora che è possibile costruire un secondo array che ha fattore di schiera pari al quadrato di quello dato, ovvero:

$$f(z) = (1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$$

non rappresenta una schiera uniforme, poiché la ampiezze delle correnti sono nel rapporto 1:2:1, sebbene si tratti di una schiera di elementi equispaziati con fattore di fase progressivo.

Array di Antenne

Schiere Lineari non Uniformi: schiera binomiale

La stessa procedura si può eseguire elevando il polinomio alla m-esima potenza, ottenendo la “schiera binomiale”, con fattore:

$$f(z) = (1 + z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n$$

essendo:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

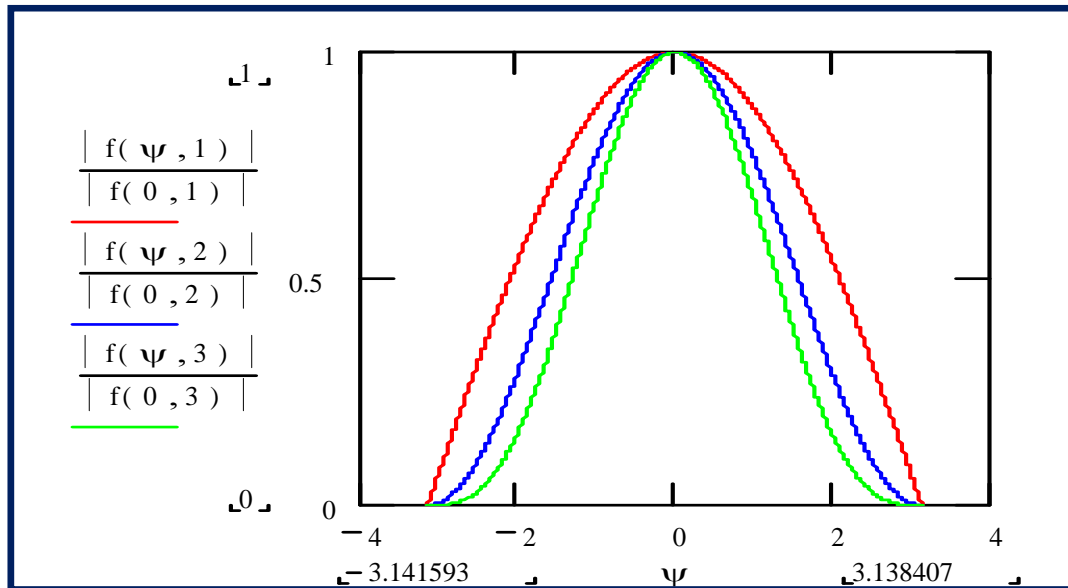
ora tale funzione ha un unico zero di molteplicità m in $z=-1$.

Quindi un unico lobo (purché la spaziatura sia meno di mezza lunghezza d'onda!)

Array di Antenne

Schiere Lineari non Uniformi: schiera binomiale

Facciamo un grafico al variare dell'ordine:



Quindi:

- non ci sono lobi laterali
- il lobo principale diviene via via più stretto

però:

- Il lobo principale è molto più largo (a parità di elementi) rispetto ad una schiera uniforme

Array di Antenne

Schiere Lineari non Uniformi: schiera binomiale

Notiamo: la schiera a 3 elementi binomiale ha correnti con ampiezza 1:2:1 (triangolare), ovvero rastremata ai bordi

Una proprietà che deriviamo (e che risulta poi del tutto generale) è:

- Addolcire la distribuzione spaziale di corrente, in modo che essa diminuisca verso gli estremi della schiera, riduce l'entità dei lobi laterali, ma allarga il lobo principale

E' possibile generalizzare il progetto delle antenne binomiali, considerando potenze m-esime di distribuzioni con più di due elementi.

Il numero di zeri ovviamente aumenta (non più solo -1) e quindi ci sono lobi laterali, ma possono essere molto più bassi di una schiera uniforme

Array di Antenne

Sintesi di array

E' possibile approssimare un desiderato fattore di schiera scegliendo opportunamente ampiezze e fasi delle correnti.

Supponiamo di avere una schiera lineare simmetrica, con un numero dispari di elementi equispaziati:

$$N = 2m + 1$$

Sappiamo che il fattore di schiera può essere scritto per mezzo del polinomio associato

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \dots A_m z^m + \dots A_{2m} z^{2m}$$

$$z = e^{j\Psi} = e^{j(kd \sin \vartheta + \psi)}$$

Poiché z ha modulo unitario, anche le sue potenze hanno modulo unitario e se dividiamo per $z^m f(z)$, il suo modulo non cambia:

$$|f(z)| = |A_0 z^{-m} + A_1 z^{-m+1} + \dots + A_{2m} z^m|$$

Array di Antenne

Sintesi di array

Ora supponiamo che le correnti di alimentazione degli elementi simmetrici rispetto a quello centrale siano complesse coniugate, ovvero che elementi simmetrici siano alimentati con correnti di ugual ampiezza ma deviazione rispetto allo sfasamento progressivo opposta.

In tal caso potremo scrivere:

$$A_m = a_0$$

$$A_{m-k} = a_k - jb_k$$

$$A_{m+k} = a_k + jb_k$$

E la somma di due termini simmetrici rispetto a quello centrale diventa:

$$\begin{aligned} A_{m-k} z^{-k} + A_{m+k} z^k &= a_k (z^k + z^{-k}) + jb_k (z^k - z^{-k}) \\ &= a_k (e^{jk\psi} + e^{-jk\psi}) + jb_k (e^{jk\psi} - e^{-jk\psi}) \\ &= 2a_k \cos(k\psi) - 2b_k \sin(k\psi) \end{aligned}$$

Array di Antenne

Sintesi di array

Quindi:

$$|f(\psi)| = 2 \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\psi) + (-b_k) \sin(k\psi) \right|$$

Ovvero: il fattore di schiera per una schiera a $2m+1$ elementi equispaziati ed alimentati simmetricamente, si presenta nella forma di una serie di Fourier troncata ai primi $2m+1$ termini, in cui a_k sono i coefficienti dei termini coseno e $-b_k$ quelli dei termini seno.

Quindi un qualsiasi fattore di schiera specificato come $f(\Psi)$ può essere espanso in serie di Fourier con un numero infinito di termini, ed approssimato con la precisione voluta da una serie troncata come quella introdotta.

Array di Antenne

Sintesi di array

Allora per la sintesi basta espandere in serie di Fourier il diagramma desiderato ed ottenere le correnti di alimentazione ricordando le relazioni tra i coefficienti e le correnti:

$$A_m = a_0$$

$$A_{m-k} = a_k - jb_k$$

$$A_{m+k} = a_k + jb_k$$

Notate che, per una spaziatura minore di mezza lunghezza d'onda, il range di visibilità non sarà l'intero angolo 2π essendo

$$-kd + \psi \leq \Psi \leq kd + \psi$$

Array di Antenne

Sintesi di array

Quindi in tal caso, mentre $f(u)$ è ovviamente specificato in tutto l'intervallo, $f(\Psi)$ è solo specificato in una parte dell'intervallo necessario all'espansione, e può essere completata a piacimento.

Ovviamente converrebbe completarla in modo che la serie di Fourier sia la più rapidamente convergente.

Se la spaziatura è esattamente mezza lunghezza d'onda il problema non esiste, visto che entrambe le funzioni sono definite in $[0, 2\pi]$.

Per spaziature maggiori di mezza lunghezza d'onda, l'intervallo di definizione eccede $[0, 2\pi]$ e questo metodo non può più essere usato.

Array di Antenne

Schiere di Dolph-Tchebyscheff

Abbiamo visto che un elevato grado di rastremazione (Tapering) della distribuzione di corrente dal centro verso i bordi della schiera produce bassi livelli dei lobi laterali a scapito del lobo principale, più largo.

Talvolta può essere richiesto di avere contemporaneamente un lobo principale più stretto e dei lobi laterali più bassi.

Si capisce come il miglior compromesso si ha quando si hanno quanti più lobi laterali possibili, e con lo stesso livello.

Infatti, per una data larghezza del lobo principale, il primo lobo secondario può essere abbassato spostando il secondo nullo più vicino al primo.

Questo comporta un incremento del livello del secondo lobo laterale, ma è possibile finché il livello di questo non raggiunge il livello del primo lobo laterale.

Array di Antenne

Schiere di Dolph-Tchebyscheff

Quindi il diagramma ottimo si ottiene quando tutti i lobi laterali hanno lo stesso livello.

Polinomi che ben si adattano a descrivere una simile situazione sono i polinomi di Tchebyscheff definiti come.

$$T_m(x) = \begin{cases} (-1)^m \cosh(m \cosh^{-1} |x|) & x < -1 \\ \cos(m \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(m \cosh^{-1} x) & x > 1 \end{cases}$$

Si vede che

$$T_0 = 1 \quad T_1 = x$$

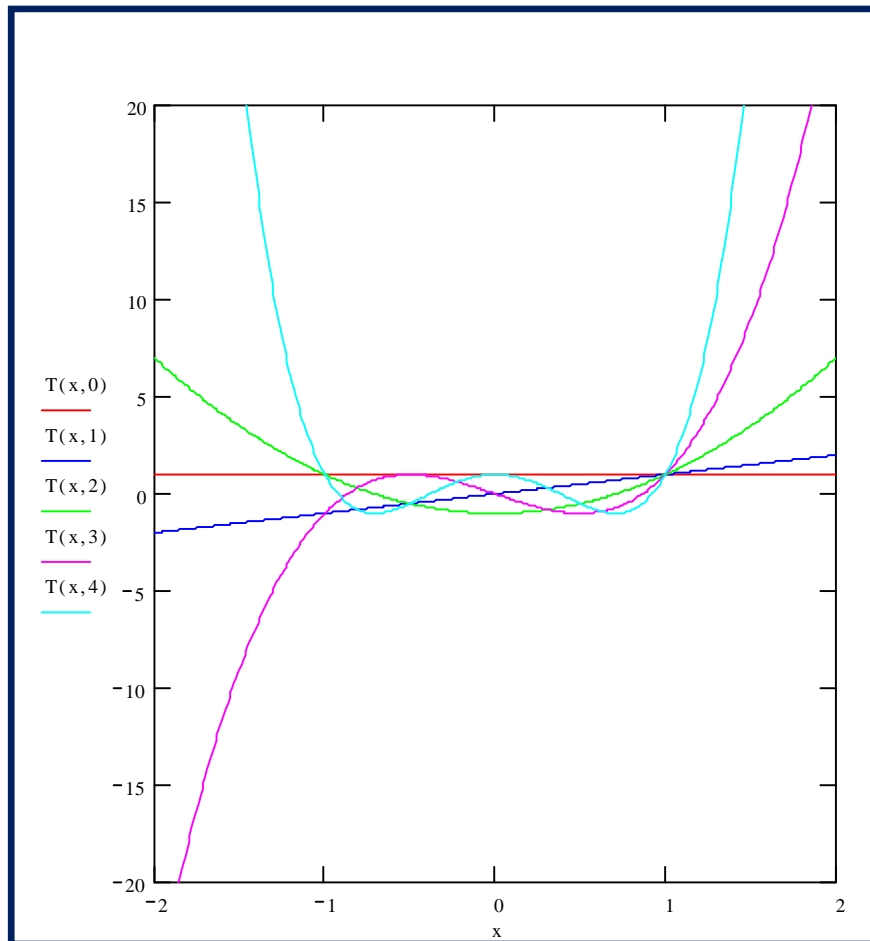
ed i polinomi di ordine superiore si possono ottenere con la formula di ricorrenza:

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x)$$

Array di Antenne

Schiere di Dolph-Tchebyscheff

Inoltre si ottiene che i polinomi di ordine pari sono pari e quelli di ordine dispari sono dispari, che passano tutti per il punto $(1,1)$, e che tutti gli zeri si hanno nel range $-1 < x < 1$, dove tutti oscillano tra -1 ed 1



quindi se x varia da un valore c (<1 in modulo) ad un valore x_0 (>1 in modulo), il polinomio di Tchebyscheff descrive una serie di lobi laterali uguali (altezza 1) ed un lobo principale (altezza >1); questa proprietà li rende adeguati al nostro compito

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Quando vi è la richiesta di lobi laterali ridotti, si usano in pratica due tipi di distribuzione, quella di Chebycheff e quella, simile alla precedente, detta di Taylor.

In particolare la distribuzione di Chebycheff prevede tutti i lobi laterali alla medesima ampiezza.

Questo consente di avere, fissato il livello dei lobi laterali, la massima direttività.

E infatti se volessimo ridurre ulteriormente uno dei lobi, dovremmo avvicinare i due zeri corrispondenti.

Ciò si può fare solo spostando anche tutti gli zeri tra uno di quelli spostati e il lobo centrale, che in tal modo si allarga.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Se invece si cerca di ridurre il lobo centrale, questo non potrebbe che provocare l'allontanamento di due zeri, e quindi un incremento del lobo laterale corrispondente oltre il valore prefissato dal vincolo.

In realtà, questa proprietà di massimo è vera esattamente per spaziatura pari a mezza lunghezza d'onda.

Per spaziature superiori è invece possibile, fissato il livello di lobi laterali, aumentare il guadagno scegliendo una spaziatura ottimale.

Se infatti consideriamo il diagramma di $F(u)$ per una distribuzione di Chebycheff, su più periodi, vediamo che possiamo estendere il dominio visibile, centrato per $u=0$, e quindi sul picco della distribuzione, fino a coprire tutti i lobi laterali, sia quelli del periodo fondamentale, sia quelli dei due periodi laterali.

Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

In questo modo, il vincolo sui lobi laterali è evidentemente rispettato, ma, avendo una spaziatura elevata, la larghezza del lobo centrale è piccola e quindi la direttività è elevata.

Ancora una volta, non è possibile aumentare ulteriormente la direttività allargando la spaziatura, perché così facendo si fa entrare nel visibile una parte del lobo spurio, non rispettando perciò più il vincolo sui lobi laterali.

Viceversa, ridurre la spaziatura allarga il lobo centrale e quindi riduce la direttività.

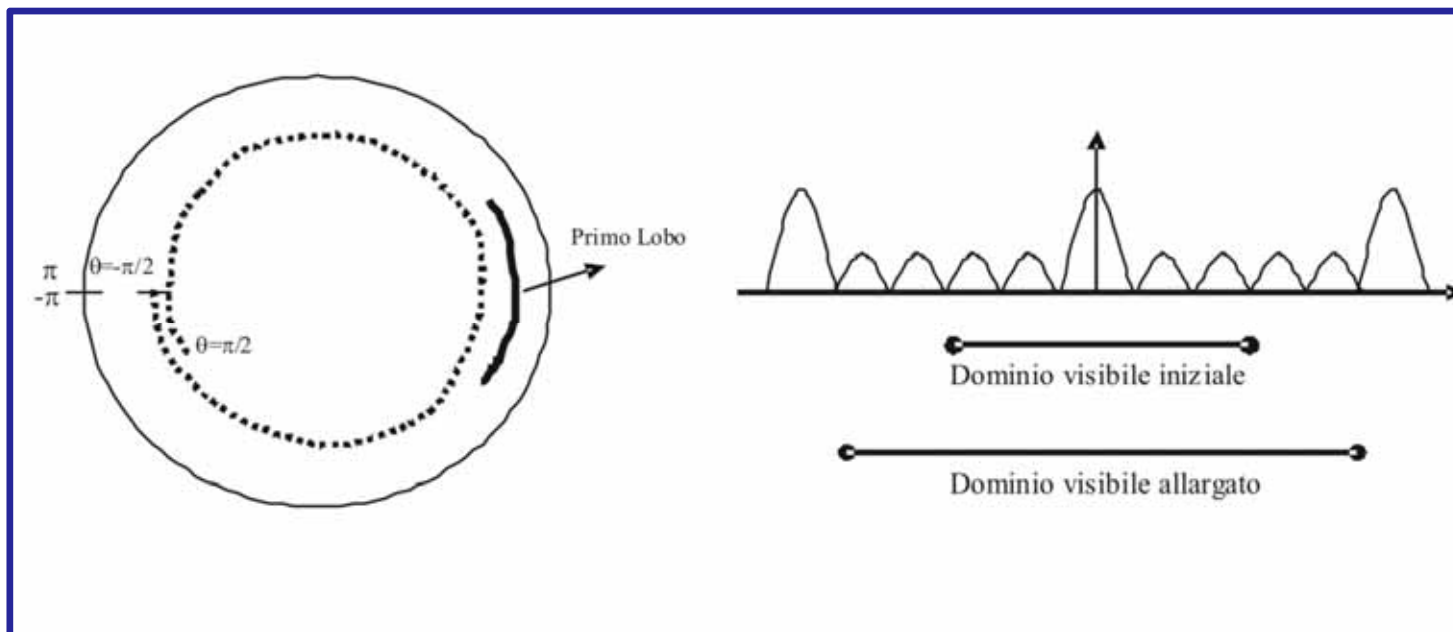
Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Vediamo di giustificare questo aumento del guadagno. La trasformazione fra Z ed u è periodica: u non è nient'altro che la fase di Z .

Se la spaziatura è $\lambda/2$, il cerchio è tutto nel visibile.

Se $d > \lambda/2$, allora il visibile fa più di un giro, nel senso che i valori di $\pi/2$ e $-\pi/2$ nella variabile θ si raggiungono compiendo più di un giro del cerchio, che corrisponde al periodo fondamentale $(-\pi, \pi)$ in u .



Array di Antenne

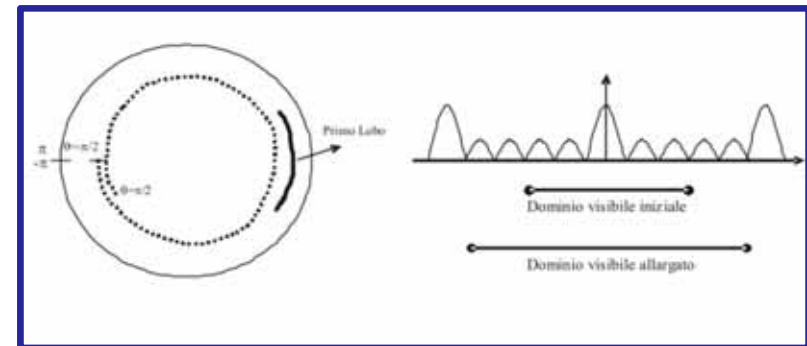
IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Compiendo più di un giro, la zona del lobo centrale, in termini di angolo fisico θ , diventa via via più stretta e continua a restringersi man mano che sale la spaziatura (e che quindi aumenta il numero di giri che percorro sul cerchio).

Quindi allargando la zona del visibile (ossia aumentando la spaziatura d) diminuisce relativamente la distanza fra i due zeri del lobo centrale.

In pratica estendo il dominio visibile fino ad includere tutti i lobi secondari possibili, fino ad arrivare ai grating lobes esclusi, poiché più lobi secondari metto e più si stringe il fascio.

Quindi metto tutti i lobi secondari anche del periodo successivo in u , senza includere i grating lobes, che mi farebbero crollare il guadagno.



Array di Antenne

IL POLINOMIO DI SCHELKUNOFF

Calcolare i coefficienti di Chebycheff non è banale dal punto di vista computazionale, ed inoltre gli array che seguono questa distribuzione sono molto sensibili agli errori realizzativi.

Spesso si preferisce la distribuzione di Taylor, la quale ha lobi costanti fino ad un certo punto, e che poi decrescono. Quella di Taylor è una distribuzione non ottimale, ma molto meno sensibile agli errori; infatti basta un piccolo errore nell'ampiezza delle eccitazioni per allargare il fascio e quindi per far scendere il guadagno di una distribuzione di Chebycheff al di sotto di quello di una distribuzione di Taylor corrispondente.

E' possibile ottenere distribuzioni di Chebycheff anche per spaziature molto piccole ($d < \lambda/2$) con larghezze di fascio sottilissime e direttività elevatissime, ma nella pratica tali distribuzioni non sono realizzabili, dato che prevedono correnti elevatissime con conseguenti notevoli perdite di guadagno per dissipazione di potenza.